Ecuaciones diferenciales

Corresponden a cualquier ecuación en la que intervienen una variable dependiente y sus derivadas con respecto a una o más variables independientes.

Ya hemos visto que si $y = f\left(x\right)$ es una función dada, su derivada se puede interpretar como la razón de cambio de y con respecto a x

Por ejemplo, de acuerdo con la segunda ley de Newton, la aceleración $\vec{a}$ de un cuerpo de masa m es proporcional a la fuerza total $\vec{F}$ aplicada sobre ella, con $\frac{1}{m}$ como constante de proporcionalidad, de modo que $\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}$

Supongamos que un cuerpo de masa M cae bajo efecto de la influencia de la gravitación. En tal caso, la única fuerza que actúa sobre dicha masa es $m\vec{g}$, donde $\vec{g}$ denota la aceleración de gravedad. Si y e la altura medida hacia abajo desde cierta posición prefijada, entonces su velocidad $\vec{v} = \frac{dy}{dt}$ es el ritmo de cambio de su posición y su aceleración $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$ es el ritmo de cambio de la velocidad. Con esta notación se tendrá que

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = g$$

Si admitimos que el aire ejerce una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad, la fuerza total que actúa sobre el cuerpo es

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - k\frac{dy}{dt}$$

Ambas expresiones son las ecuaciones diferenciales que expresan los atributos esenciales de dos procesos físicos bajo consideración.

<u>Generalidades</u>

La ecuación diferencial ordinaria (E.D.O) general de orden n es

$$F\left(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

La cual también se suele escribir de forma

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

Ecuaciones diferenciales

Suele ser bastante sencillo comprobar que una función dada $y = y(x)$ es una solución de una ecuación. Bastara calcular las derivadas de la ecuación y mostrar que cuando se sustituyen en la ecuación diferencial, la reducen a una igualdad. Por ejemplo $y = e^{2x}$ e $y = e^{3x}$ son ambas soluciones de $y'' - 5y' + 6y = 0$

De hecho si $y = e^{2x}$ entonces $y' = 2e^{2x}$ e $y'' = 4e^{2x}$.

Evaluando se tendrá que

$$\underbrace{y''}_{4e^{2x}} - 5\underbrace{y'}_{2e^{2x}} + 6y = 0$$

$$4e^{2x} - 5\left(2e^{2x}\right) + 6\left(e^{2x}\right) = 4e^{2x} - 10e^{2x} + 6e^{2x} = 0$$

Y si $y = e^{3x}$ entonces $y' = 3e^{3x}$ e $y'' = 9e^{3x}$ entonces al evaluar se llegara a que

$$\underbrace{y''}_{9e^{3x}} - 5\underbrace{y'}_{3e^{3x}} + 6y = 0$$

$$9e^{3x} - 5\left(3e^{3x}\right) + 6\left(e^{3x}\right) = 9e^{3x} - 13e^{3x} + 6e^{3x} = 0$$

De modo mas general se tendrá que

$y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$ también lo es para toda elección arbitraria de c_1 y c_2.

De hecho

$$y' = 2c_1e^{2x} + 3c_2e^{3x} \quad \text{e} \quad y'' = 4c_1e^{2x} + 9c_2e^{3x}$$

Evaluando

$$\underbrace{y''}_{4c_1e^{2x}+9c_2e^{3x}} - 5\underbrace{y'}_{2c_1e^{2x}+3c_2e^{3x}} + 6y = 0$$

$$= 4c_1e^{2x} + 9c_2e^{3x} - 5\left(2c_1e^{2x} + 3c_2e^{3x}\right) + 6\left(c_1e^{2x} + c_2e^{3x}\right)$$

$$= 4c_1e^{2x} + 9c_2e^{3x} - 10c_1e^{2x} - 15c_2e^{3x} + 6c_1e^{2x} + 6c_2e^{3x}$$

$$= 4c_1e^{2x} - 10c_1e^{2x} + 6c_1e^{2x} + 9c_2e^{3x} - 15c_2e^{3x} + 6c_2e^{3x}$$

$$= 0$$

Lo cual evidencia la identidad.

Ecuaciones diferenciales

Con frecuencia aparecen soluciones de ecuaciones diferenciales definidas implícitamente y, a veces, es difícil o inclusive imposible expresar la variable dependiente en forma explicita en términos de la variable independiente. Así por ejemplo $xy = \log(y) + C$ es una solución de $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-xy}$, para todo valor de la constante C, como se puede comprobar tras simplemente derivar y reordenar el resultado.

La más simple de las ecuaciones será

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow dy = f(x)\,dx \Rightarrow \int dy = \int f(x)dx + C}$$

En ciertos casos la integral indefinida puede hallarse por los métodos de cálculo; en otros casos puede ser difícil o realmente imposible hallar una forma para tal. Pese a ello siempre habrá alternativas.

Las llamadas ***ecuaciones separables***, o ***ecuaciones con variables separables***, están al mismo nivel de dificultad. Son aquellas ecuaciones que se pueden escribir de la forma,

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$$

donde los términos a la derecha corresponden a un producto de dos funciones, cada una independiente de solo una de las variables. En tales circunstancias podemos separar las variables y resolver la ecuación original por integración.

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \rightarrow \boxed{\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C}$$

Estas son ecuaciones diferenciales muy sencillas en el sentido de que su resolución se reduce a un problema de integración, aun cuando es posible que las integrales obtenidas sean…"complicadas".

Casos de estudio

1. $$\boxed{\frac{dy}{dt}=\frac{x+1}{y}}$$

Desarrollo

$$ydy=(x+1)\,dx \to \int ydy=\int (x+1)dx \to \frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+x+C_1$$

Ordenando

$$\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+\frac{2x}{2}+\frac{C_2}{2} \to y^2=x^2+2x+C_2 \Rightarrow \boxed{y=\sqrt{x^2+2x+C_2}}$$

2. $$\boxed{x\frac{dy}{dx}=2y}$$

Desarrollo

$$\frac{dy}{2y}=\frac{dx}{x} \to \frac{1}{2}\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(y)=\ln(x)+\underbrace{C_1}_{\ln(C)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(y)=\ln(x)+\ln(C)$$

$$\Rightarrow \ln\left(y^{\frac{1}{2}}\right)=\ln(Cx)$$

Exponenciando

$$\Rightarrow e^{\ln\left(y^{\frac{1}{2}}\right)}=e^{\ln(Cx)}$$

$$\Rightarrow y^{\frac{1}{2}}=Cx$$

$$\Rightarrow \boxed{y=(Cx)^2}$$

3. $\boxed{x^2dx+(y+1)^2\,dy=0}$

Desarrollo

$$\int x^2dx+\int (y+1)^2dy=\frac{x^3}{3}+\frac{(y+1)^3}{3}+\underbrace{C1}_{\frac{C_2}{3}}=0$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{(y+1)^3}{3}+\frac{C_2}{3}=0$$

$$=x^3+(y+1)^3+C_2=0$$

Despejando y en relaciona la variable x se tendrá que

$$+(y+1)^3=\underbrace{-C_2}_{C_3}-x^3$$

$$(y+1)^3=C_3-x^3$$

$$y+1=\sqrt[3]{C_3-x^3}$$

$$y(x)=\sqrt[3]{C_3-x^3}-1$$

4. Solucionar la siguiente ecuación diferencial $dy=-4xdx$ sabiendo que $x=0$ cuando $y=1$

$$\int dy=-4\int xdx\rightarrow y=-4\frac{x^2}{2}+C\rightarrow y=-2x^2+C$$

Pero sabemos que x=0 cuando y=1, luego podemos evaluar

$$\underbrace{y}_{1}=-2\underbrace{x}_{0}^2+C\Rightarrow 1=0+C\Rightarrow C=1$$

Entonces la Ecuación buscada será $\boxed{y=-2x^2+1}$

5. Determina la solución de $\dfrac{d^2y}{dx^2} = x + \cos(x)$

Sea

$$u = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Sustituyendo se tendrá que

$$\frac{du}{dx} = x + \cos(x) \rightarrow du = x + \cos(x)\,dx \rightarrow \int du = \int x + \cos(x)dx$$

$$\rightarrow u = \frac{x^2}{2} + sen(x) + C_1$$

Y reemplazando nuevamente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + sen(x) + C_1 \rightarrow dy = \left(\frac{x^2}{2} + sen(x) + C_1\right)dx$$

$$\rightarrow \int dy = \int\left(\frac{x^2}{2} + sen(x) + C_1\right)dx$$

$$\rightarrow \boxed{y = \frac{x^3}{6} - \cos(x) + C_1 x + C_2}$$

6. Determinar la solución de la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2}=-2$ sabiendo que cuando $x=0$, $y=2$ e $\frac{dy}{dx}=1$

Sea

$$u=\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$$

Entonces

$$\frac{du}{dx}=-2\rightarrow du=-2dx\rightarrow\int du=-2\int dx\rightarrow u=-2x+c$$

Entonces, sabiendo al condiciones iniciales tendremos que

$$u=-2x+c\rightarrow\frac{dy}{dx}=-2x+c\rightarrow\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{1}=-2\underbrace{x}_{0}+c\rightarrow 1=0+C\Rightarrow\boxed{C=1}$$

Luego

$$\frac{dy}{dx}=-2x+1$$

Integrando nuevamente y evaluando

$$dy=(-2x+1)\,dx\rightarrow\int dy=\int(-2x+1)dx$$

$$\rightarrow y=-2\frac{x^2}{2}+x+C_2$$

$$\rightarrow\underbrace{y}_{2}=\underbrace{x}_{0}{}^2+\underbrace{x}_{0}+C_2\Rightarrow\boxed{C_2=2}$$

Luego $\rightarrow\boxed{y=x^2+x+2}$

7. Determinar la solución de la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2}=-3x$ sabiendo que cuando $x=1$, $y=4$ e $\frac{dy}{dx}=2$

Sea

$$u=\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$$

Entonces

$$\frac{du}{dx}=-3x\rightarrow du=-3xdx\rightarrow\int du=-3\int xdx\rightarrow u=-3\frac{x^2}{2}+C_1$$

Evaluando tendremos que

$$\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{2}=\underbrace{-3\frac{x^2}{2}}_{\frac{-3}{2}}+C_1\rightarrow 2=\frac{-3}{2}+C_1\Rightarrow C_1=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$$

Entonces

$$\frac{dy}{dx}=-3\frac{x^2}{2}+\frac{7}{2}\rightarrow du=-\left(3\frac{x^2}{2}+\frac{7}{2}\right)dx$$

$$\rightarrow\int dy=\int\left(-3\frac{x^2}{2}+\frac{7}{2}\right)dx$$

$$\rightarrow y=-\frac{3}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{7}{2}x+C_2$$

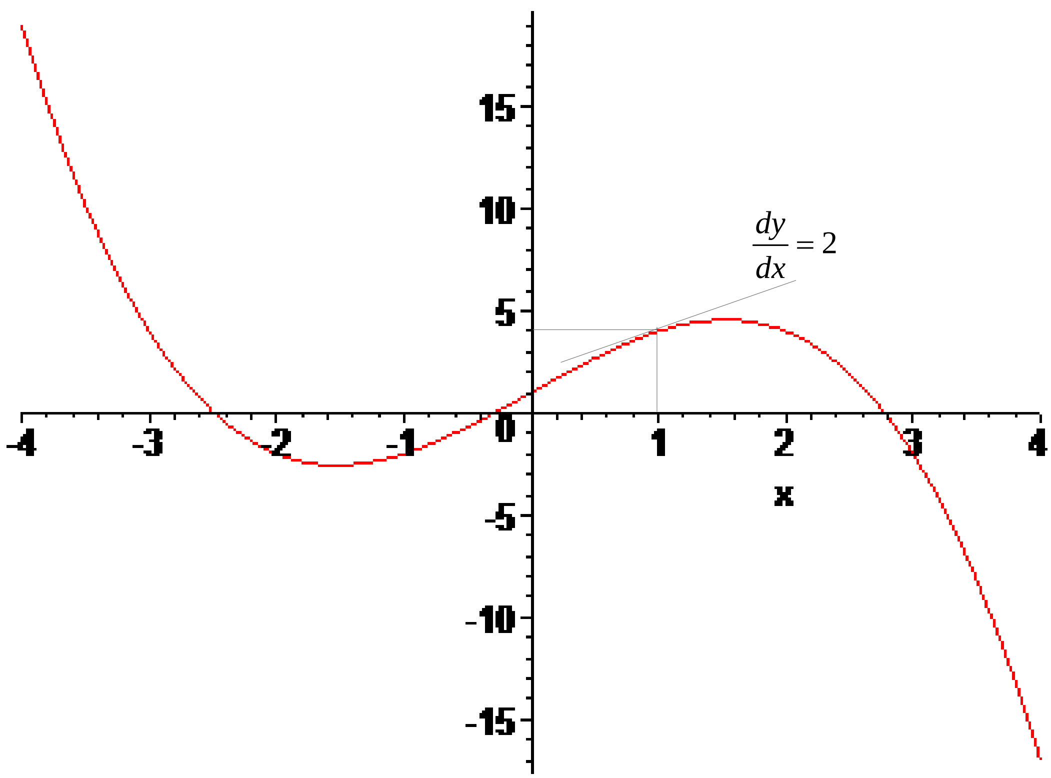
$$\rightarrow y=-\frac{x^3}{2}+\frac{7}{2}x+C_2$$

Evaluando según las condiciones iniciales tendremos que

$$\underbrace{y}_{4}=-\underbrace{\frac{x^3}{2}}_{-\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{7}{2}x}_{\frac{7}{2}}+C_2 \Rightarrow 4=-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}+C_2 \Rightarrow 4=3+C_2 \rightarrow \boxed{C_2=1}$$

De donde finalmente, la ecuación correspondiente será

$$\boxed{y=-\frac{x^3}{2}+\frac{7}{2}x+1}$$



8. Resolver $(x+1)\dfrac{dy}{dx}=x\left(y^2+1\right)$

Por variables separables tendremos que

$$\frac{dy}{\left(y^2+1\right)}=\frac{x}{x+1}dx \to \int\frac{dy}{\left(y^2+1\right)}=\int\frac{x}{x+1}dx$$

La integral de la izquierda no presenta dificultad, sin embargo la derecha ha de estudiarse un momento

Sea $u=x+1$, entonces $x=u-1$ y $dx=du$, por lo tanto

$$\int\frac{x}{x+1}dx=\int\frac{u-1}{u}du=\int du-\int\frac{du}{u}=u-\ln(u)+C_1$$

Y reescribiendo la estructura se tendrá que

$$Arctg(y)=\underbrace{u}_{x+1}-\ln\left(\underbrace{u}_{x+1}\right)+C_1$$

$$Arctg(y)=x+1-\ln(x+1)+C_1$$

$$y=\tan\left(x+1-\ln(x+1)+C_1\right)$$

Ecuaciones diferenciales

Ejercicios

Verificar que la siguiente funciones son soluciones de las correspondientes ecuaciones diferenciales

a.) $y = x^2 + C$ $\quad y' = 2x$

b.) $y = Cx^2$ $\quad x\,y' = 2y$

c.) $y^2 = e^{2x} + C$ $\quad y\,y' = e^{2x}$

d.) $y = Ce^{kx}$ $\quad y' = ky$

e.) $y = C_1 sen(2x) + C_2 \cos(2x)$ $\quad y'' + 4y = 0$

f.) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$ $\quad y'' - 4y = 0$

g.) $y^2 = x^2 - Cx$ $\quad 2xyy' = x^2 + y^2$

h.) $y = C^2 + \dfrac{C}{x}$ $\quad y + xy' = x^4 (y')^2$

i.) $y = Cx^{\frac{y}{x}}$ $\quad y' = \dfrac{y^2}{xy - x^2}$

Determinar la solución general de cada una de las siguientes diferenciales

a.) $y' = e^{3x} - x$

b.) $xy' = 1$

c.) $y' = xe^{x^2}$

d.) $(1 + x)y' = x$

e.) $(1 + x^3)y' = x$

f.) $xyy' = y - 1$

g.) $x^5 y' + y^5 = 0$

h.) $y' = 2xy$

i.) $y' sen(y) = x^2$

j.) $y' sen(y) = 1$

k.) $y' + y\tan(x) = 0$

l.) $y\ln(y)dx - xdy = 0$

m.) $(1 + x^2)dy + (1 + y^2)dx = 0$

Para cada una de las ecuaciones diferenciales calcular la solución particular que satisface la condición inicial.

a.) $y' = xe^x$, si y = 3 cuando x = 1

b.) $y' = 2sen(x)\cos(x)$ si y = 1 cuando x = 0

c.) $y' = \ln(x)$, si y = 0 cuando x = e

d.) $(x^2 - 1)y' = 1$, si y = 0 cuando x = 2

e.) $x(x^2 - 4)y' = 1$, si y = 0 cuando x = 1

f.) $(x + 1)(x^2 + 1)y' = 2x^2 + x$, si y = 1 cuando x = 0