“La estudiar estos apuntes jamás debe pasar sin aceptar directamente frases como “veremos que” , “es fácil ver” o “ se comprueba fácilmente que ”, sin constatar personalmente su veracidad. El simple hecho de que algo este publicado NO significa que sea necesariamente cierto. Es preciso cultivar el escepticismo como un saludable estado mental. No acepte nada por autoridad de este autor o de cualquier otro hasta que no lo haya comprendido cabalmente.”

Aplicaciones

Interés compuesto continuo

Si depositamos una capital P en un banco que paga una tasa de interés del 6%, compuesto semestralmente, entonces tras t años el capital acumulado será

$$A = P(1 + 0,03)^{2t}$$

En general si la tasa de interés es 100k, donde k=0,06 para el 6%, y si ese capital se compone n veces al año, tras t años el capital acumulado será

$$A = P\left(1 + \frac{k}{n}\right)^{nt}$$

Si se hace crecer n de modo que el interés se componga con frecuencia cada vez mayor, tendremos el caso de un límite, en que el interés se compone continuamente. La expresión correspondiente será

$$\left(1 + \frac{k}{n}\right)^{nt} = \left[\left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{k}}\right]^{kt} \rightarrow A = Pe^{kt}$$

Esto es decir que la cantidad a crece exponencialmente o que es un modelo de crecimiento exponencial.

La derivar la expresión se tendrá que

$$\frac{dA}{dt} = Pke^{kt} = kA$$

De donde se puede observar que k viene a ser el cambio relativo de A por unidad de tiempo y que 100k es el % de cambio de A por unidad de tiempo.

Crecimiento de población

Supongamos que se colocan x_0 bacterias en una solución nutriente en el instante $t = 0$ y que $x = x(t)$ es la población de cultivo en el instante t. Si el espacio y el alimento son <u>ilimitados</u>, y si como consecuencia la población esta creciendo a un ritmo proporcional a la población presente en ese momento, hallar x como función de t.

Desarrollo

Dado que el crecimiento es proporcional a la propia x, podemos escribir la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

Separando variables e integrando deducimos que

$$\frac{dx}{x} = kdt \to \int \frac{dx}{x} = \int kdt \to \ln(x) = kt + C$$

Como $x = x_0$ cuando $t = 0$ tenemos que

$$\ln(x_0) = \cancel{kt} + C \Rightarrow \boxed{C = \ln(x_0)}$$

Por ende

$$\ln(x) = kt + \ln(x_0)$$

$$\ln(x) - \ln(x_0) = kt$$

$$\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = kt$$

Exponenciando

$$e^{\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)} = e^{kt}$$

$$\frac{x}{x_0} = e^{kt}$$

$$x = x_0 e^{kt}$$

Lo cual corresponde a un modelo exponencial.

Supongamos que la población humana crece bajo este modelo. Los expertos aseguran que la población humana crece a una tasa del 2% anual, luego

$$k = 2\% = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$$

Y la ecuación queda como

$$x = x_0 e^{\frac{t}{50}}$$

Para hallar el tiempo t necesario para que se duplique, es decir para que $x = 2x_0$

$$2x_0 = x_0 e^{\frac{t}{50}}$$

Desarrollando se llega a que

$$\frac{2\cancel{x_0}}{\cancel{x_0}} = e^{\frac{t}{50}} \Rightarrow 2 = e^{\frac{t}{50}}$$

Aplicando logaritmo natural

$$\ln(2) = \frac{t}{50} \Rightarrow \boxed{t = 50\ln(2)}$$

Es decir, aproximadamente 34,65 años

Desintegración radiactiva

Si las moléculas de cierto tipo tienen tendencia a desintegrarse en moléculas mas pequeñas a un ritmo de cambio que no se ve afectado por la presencia de otras sustancias, es natural esperar que el numero de moléculas que se descomponen en una unidad de tiempo sea proporcional al numero de moléculas total presente. Una reacción química de esta clase se llama una **reacción de primer orden**

Supongamos que x_0 gramos de materia se descomponen por este tipo de reacción. Si $x(t)$ denota el número de gramos presentes en el instante t posterior, el principio indicado conduce a la ecuación

$$-\frac{dx}{dt} = kx$$

Entonces

$$\frac{dx}{x} = -kdt$$

Al integrar se llega a que

$$\int \frac{1}{x}dx = -k\int dt$$

$$\ln(x) = -kt + C$$

Y dado que $x = x_0$ cuando $t = 0$

$$\ln(x_0) = -\underbrace{\cancel{kt}}_{0} + C \Rightarrow C = \ln(x_0)$$

Por ende

$$\ln(x) = -kt + \ln(x_0)$$

Luego

$$\ln(x) - \ln(x_0) = -kt$$

$$\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = -kt$$

Exponenciando

$$e^{\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)} = e^{-kt} \Rightarrow \frac{x}{x_0} = e^{-kt} \Rightarrow \boxed{x = x_0 e^{-kt}}$$

Analizando el caso particular de la semivida, que es el tiempo necesario para que la cantidad de materia se reduzca a la mitad, es decir $x = \frac{x_0}{2}$, se tendrá que

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-kt}$$

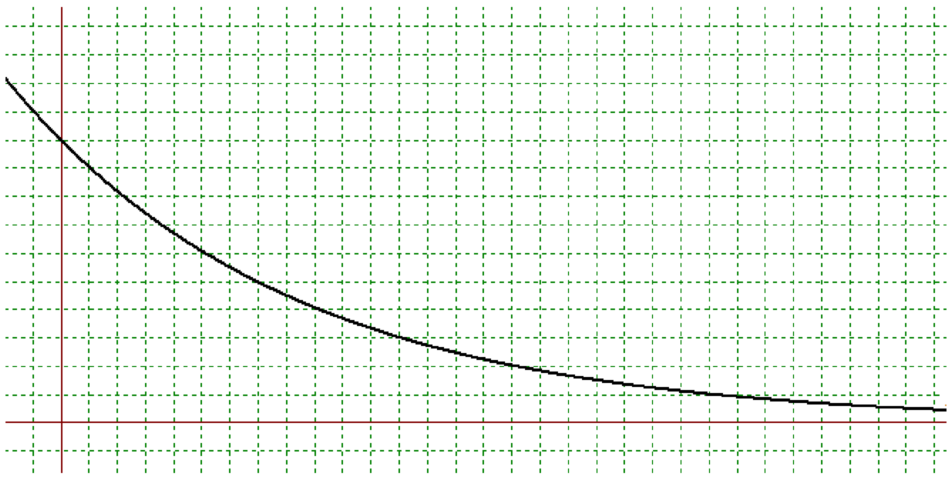
$$\frac{\cancel{x_0}}{2\cancel{x_0}} = e^{-kt}$$

Por lo tanto bastara ordenar y aplicar logaritmo natural

$$\frac{1}{2} = e^{-kt} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{e^{kt}} \Rightarrow \boxed{2 = e^{kt}} \Rightarrow \ln(2) = kt$$

Despejando entonces la variable tiempo

$$t = \frac{\ln 2}{k}$$



Mezclas

Un deposito contienen 50 litros de salmuera en que hay disueltos 75 kilos de sal. A partir de un instante t=0, comienza a fluir en el salmuera que contiene 3 kilos de sal por litro, a un ritmo de 2 litros por minuto. Simultáneamente la mezcla, que se esta revolviendo en todo momento, escapa del deposito al mismo ritmo. ¿Cuándo habrá 125 kilos de sal en el depósito? ¿Cuánta sal se habrá disuelto tras largo tiempo?

Si $x = x(t)$ es el numero de kilos de sal disuelta en el deposito en el instante $t \geq 0$, la concentración en ese momento será $\frac{x}{50}$ kilos por litro, por lo tanto la razón de cambio stara dada por

$$\frac{dx}{dt} = \begin{matrix} ritmo \\ de \\ entrada \end{matrix} - \begin{matrix} ritmo \\ de \\ salida \end{matrix}$$

Sabemos que el ritmo de entrada de la sal esta dado por

$$3\left[\frac{kilos}{litro}\right] \cdot 2\left[\frac{litros}{\min}\right] = 3 \cdot 2\left[\frac{kilos}{\cancel{litro}}\,\frac{\cancel{litros}}{\min}\right] = 6\left[\frac{kilos}{\min}\right]$$

Y el ritmo de salida esta dado por

$$\frac{x}{50}\left[\frac{kilos}{litro}\right] \cdot 2\left[\frac{litros}{\min uto}\right] = \frac{x}{50} \cdot 2\left[\frac{kilos}{\cancel{litro}}\,\frac{\cancel{litros}}{\min}\right] = \frac{x}{25}\left[\frac{kilos}{\min uto}\right]$$

Entonces la ecuación pertinente será

$$\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{x}{25} \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{150 - x}{25}}$$

Lo cual es claramente una ecuación de variables separables, y la que puede ser resuelta del siguiente modo

$$\frac{dx}{150 - x} = \frac{dt}{25}$$

Integrando

$$\int \frac{dx}{150 - x} = \int \frac{dt}{25}$$

Luego

$$-\ln(150 - x) = \frac{t}{25} + C \Rightarrow \ln(150 - x) = -\frac{t}{25} + C$$

Dadas las condiciones iniciales se tendrá que inicialmente teníamos 75 kilos de sal en $t = 0$, luego

$$\ln(75) = \cancel{-\frac{t}{25}} + C \Rightarrow \boxed{C = \ln(75)}$$

Entonces la ecuación correspondiente será

$$\ln(150 - x) = -\frac{t}{25} + \ln(75)$$

Despejando adecuadamente se tendrá que

$$\ln(150 - x) - \ln(75) = -\frac{t}{25}$$

$$\ln\left(\frac{150 - x}{75}\right) = -\frac{t}{25} \to \ln\left(\frac{x - 150}{75}\right) = -\frac{t}{25}$$

Exponenciando

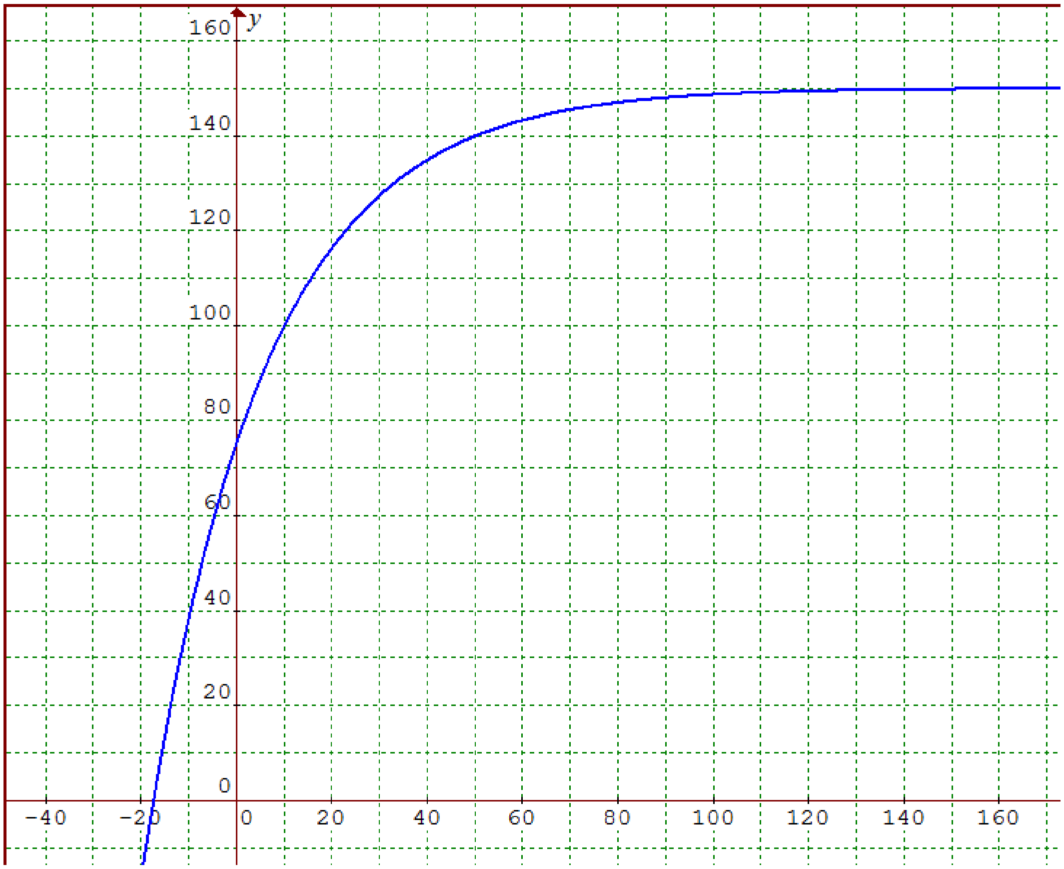
$$e^{\ln\left(\frac{150-x}{75}\right)} = e^{-\frac{t}{25}}$$

Es decir

$$\frac{150 - x}{75} = e^{-\frac{t}{25}}$$

Por ende

$$150 - x = 75e^{-\frac{t}{25}} \to \boxed{x = 150 - 75e^{-\frac{t}{25}}}$$



Problemas de aplicación general

Si la población de un país se duplica en 50 años, ¿en cuantos años será el triple suponiendo que la tasa de crecimiento se mantiene como una proporcional al numero de habitantes?

Sea $y = y(t)$ la población a los t años, entonces y_0 es la población inicial en t=0, entonces

$$\frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow \frac{dy}{y} = kdt \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int kdt \to \ln(y) = kt + C$$

Para $t = 0,\ y = y_0$, luego

$$\ln(y_0) = \cancel{kt} + C$$

Por lo tanto la ecuación correspondiente sera

$$\ln(y) = kt + \ln(y_0)$$

es decir

$$y = y_0 e^{kt}$$

Evaluemos los datos conocidos

Para $t = 50$ sabemos que $y = 2y_0$
Por ende

$$\ln(2y_0) = 50k + \ln(y_0)$$

Luego

$$\ln(2y_0) - \ln(y_0) = 50k$$
$$\ln\left(\frac{2y_0}{y_0}\right) = 50k$$
$$\ln(2) = 50k \Rightarrow \boxed{k = \frac{\ln(2)}{50}}$$

Si $y = 3y_0$

$$\ln(3y_0) = \frac{\ln(2)}{50}t + \ln(y_0)$$

Luego

$$\ln(3y_0) - \ln(y_0) = \frac{\ln(2)}{50}t$$
$$\ln\left(\frac{3y_0}{y_0}\right) = \frac{\ln(2)}{50}t$$
$$\ln(3) = \frac{\ln(2)}{50}t \Rightarrow \boxed{k = \frac{50\ln(3)}{\ln(2)}}$$

Es decir, aproximadamente 79 años

Otra forma de analizar el problema es integrando entre los limites $t = 0, y = y_0$ y $t = 50, y = 2y_0$

$$\int_{y_0}^{2y_0} \frac{dy}{y} = k\int_0^{50} dt \to \ln(2y_0) - \ln(y_0) = 50k \to k = \frac{\ln(2)}{50}$$

Por ende

$$\int_{y_0}^{3y_0} \frac{dy}{y} = \frac{\ln(2)}{50}\int_0^{t} dt \to \ln(3y_0) - \ln(y_0) = \frac{\ln(2)}{50}t \to t = 50\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$$

En cierto cultivo de bacterias la velocidad de aumento es proporcional al número presente.

- **Si se ha hallado que el numero se duplico cada cuatro horas., ¿Qué numero se esperara tras 12 horas?**
- **Además, si hay 10^4 al cabo de 3 horas y $4 \cdot 10^4$ al cabo de 5 horas ¿cuantas había inicialmente?**

Tenemos que x es el número de bacterias a las t horas

Luego

$$\frac{dx}{dt} = kx \Rightarrow \frac{dx}{x} = kdt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int kdt \Rightarrow \ln(x) = kt + C$$

Entonces

$$x = Ce^{kt}$$

Para las condiciones iniciales $x = x_0$ en $t = 0$, se tendrá que

$$x = x_0 e^{kt}$$

Para $t = 4$ y $x = 2x_0$ se tendrá que

$$2x_0 = x_0 e^{4k}$$

Por ende

$$k = \frac{\ln(2)}{4}$$

Y ¿Qué numero es esperable tras 12 horas?

$$x = x_0 e^{kt} \Rightarrow x = x_0 e^{\frac{\ln(2)}{4}\cdot 12}$$

$$\Rightarrow x = x_0 e^{3\ln(2)}$$

$$\Rightarrow x = x_0 e^{\ln(2^3)}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 8x_0}$$

Otra forma seria integrar

$$\int_{x_0}^{2x_0} \frac{dx}{x} = \int_0^4 k dt \to \ln(2x_0) - \ln(x_0) = 4k \Rightarrow k = \frac{\ln(2)}{4}$$

Por consecuencia

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \int_0^{12} \frac{\ln(2)}{4} dt \Rightarrow \ln(x) - \ln(x_0) = \frac{\ln(2)}{4} 12$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = 3\ln(2)$$

$$\Rightarrow x = x_0 e^{\ln(2^3)} \to \boxed{x = 8x_0}$$

Si sabemos además que hay 10^4 al cabo de 3 horas y $4 \cdot 10^4$ al cabo de 5 horas se tendrá que

$$\ln(x) = kt + \ln(C) \Rightarrow x(t) = Ce^{kt}$$

Remplazando y evaluando se tendrá que

$$10^4 = Ce^{3k} \text{ y } 4 \cdot 10^4 = Ce^{5k}$$

Entonces bastara igualar

Si multiplicamos la primera igualdad por 4 y comparamos con la segunda

$$4 \cdot 10^4 = 4 \cdot Ce^{3k}$$

Entonces

$$4 \cdot Ce^{3k} = Ce^{5k}$$

$$\frac{4 \cdot Ce^{3k}}{Ce^{5k}} = 1$$

$$\frac{4}{e^{2k}} = 1 \Rightarrow \boxed{4 = e^{2k}}$$

Aplicando logaritmos natural se determina que

$$\ln(4) = 2k$$
$$\Downarrow$$
$$k = \frac{1}{2}\ln(4)$$
$$\Downarrow$$
$$k = \ln(2) \to e^k = 2$$

Luego, el número original de bacterias será

$$C = \frac{10^4}{e^{3k}} \Rightarrow C = \frac{10^4}{\left(e^k\right)^3} \Rightarrow C = \frac{10^4}{2^3} \Rightarrow C = \frac{10^4}{8}$$

Otra forma de enfrentar el problema seria

$$\int_{10^4}^{4\cdot 10^4} \frac{dx}{x} = k\int_3^5 dt \Rightarrow \ln\left(4\cdot 10^4\right) - \ln\left(10^4\right) = 5k - 3k$$

Entonces

$$\ln(4) = 2k \Rightarrow k = \ln(2)$$

Entonces

$$\int_{x_0}^{10^4} \frac{dx}{x} = \ln(2)\int_0^3 dt \Rightarrow \ln\left(10^4\right) - \ln(x_0) = 3\ln(2)$$

En consecuencia

$$\ln(x_0) = \ln\left(10^4\right) - 3\ln(2)$$

Y por lo tanto

$$\ln(x_0) = \ln\left(\frac{10^4}{8}\right) \Rightarrow x_0 = \frac{10^4}{8}$$

Según la ley de enfriamiento de Newton, la velocidad de enfriamiento de una sustancia al aire libre es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la sustancia y el aire. Si la temperatura del aire es de 30°C y la sustancia se enfría de 100°C a 70°C en 15 minutos. ¿Cuándo será 40°C la temperatura de la sustancia?

Sea $\mathrm{T}(t)$ la temperatura de la sustancia a los t minutos, entonces

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-30) \Rightarrow \frac{dT}{T-30} = -kdt$$

Integrando entre los limites correspondientes se llegara a

$$\int_{T=100}^{T=70} \frac{dT}{T-30} = -k\int_0^{15} dt$$

Lo cual implica

$$\int_{T=100}^{T=70} \frac{dT}{T-30} = -k\int_0^{15} dt$$

$$\ln(T-30)\Big|_{T=100}^{T=70} = -k(15-0)$$

Evaluando

$$\ln(70-30) - \ln(100-30) = -15k$$

$$\ln(40) - \ln(70) = -15k$$

$$\ln\left(\frac{4}{7}\right) = -15k \rightarrow \boxed{\ln\left(\frac{7}{4}\right) = 15k}$$

Evaluando en las condiciones iniciales tendremos que

$$\int_{T=100}^{T=40} \frac{dT}{T-30} = -k\int_0^{t} dt$$

$$\ln(T-30)\Big|_{T=100}^{T=40} = -kt$$

y sabemos el valor de k, de tal que ordenando se llega a que

$$\ln(40-30)-\ln(100-30)=-kt$$
$$\ln(10)-\ln(70)=-kt$$
$$\ln(70)-\ln(10)=kt$$
$$\ln(7)=kt$$

Entonces, multiplicando adecuadamente por 15, para usar la constante encontrada se tendrá que

$$15\ln(7)=15kt$$
$$15\ln(7)=\ln\left(\frac{7}{4}\right)t$$
$$t=\frac{15\ln(7)}{\ln\left(\frac{7}{4}\right)}$$

Lo cual será despejado entregando como tiempo

$$t=52{,}15837878[\min]$$

Cierto producto químico se disuelve en el agua a velocidad proporcional al producto de la cantidad aun no disuelta y la diferencia entre la concentración en una solución saturada y al concentración en la solución real. Se sabe que en 100 gr de una solución saturada están disueltos 50 gr de una sustancia S. Se agitan 30 gr del producto con 100 gr de agua y en dos horas se disuelven 10 gr. ¿Cuántos se disolverán en 5 horas?

Sea x el numero de gramos del producto quimico aun no disuelto después de t horas. En este tiempo la concentración de la solución real es $\frac{30-x}{100}$ y la de la solucion saturada es $\frac{50}{100}$, entonces

$$\frac{dx}{dt} = kx\left(\frac{50}{100} - \frac{30-x}{100}\right) = kx\left(\frac{x+20}{100}\right)$$

De donde+

$$\frac{dx}{dt} = \frac{kx(x+20)}{100}$$

Separando variables se llega a que

$$\frac{dx}{x(x+20)} = \frac{k\ dt}{100}$$

Usando fracciones parciales se llega a que

$$\int \frac{dx}{x(x+20)} = \int \frac{Adx}{x} + \int \frac{Bdx}{x+20} = \frac{k\ dt}{100}$$

Es decir

$$\frac{1}{x(x+20)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+20} = \frac{A(x+20)+Bx}{x(x+20)}$$

Entonces

$$\begin{array}{r|} (A+B)=0 \\ 20A=1 \\ \hline \end{array}$$

Luego $A=\frac{1}{20}$ y $B=\frac{-1}{20}$

Reemplazando en la estructura de la integral, se tendrá que

$$\int \frac{dx}{x(x+20)} = \frac{1}{20}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{20}\int \frac{dx}{x+20} = \frac{k}{100}\int dt$$

Multiplicando por 20

$$20\int \frac{dx}{x(x+20)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+20} = \frac{k}{5}\int dt$$

Es decir

$$20\int \frac{dx}{x(x+20)} = \ln(x) - \ln(x+20) = \frac{k\ \mathrm{t}}{5} + C$$

Entonces

$$\ln\left(\frac{x}{x+20}\right) = \frac{k\ \mathrm{t} + C_2}{5}$$

Exponenciando

$$\frac{x}{x+20} = e^{\frac{k\ \mathrm{t}+C_2}{5}}$$

Entonces

$$x = (x+20)e^{\frac{k\ \mathrm{t}+C_2}{5}}$$

Repartiendo

$$x = x\cdot e^{\frac{k\ \mathrm{t}+C_2}{5}} + 20\cdot e^{\frac{k\ \mathrm{t}+C_2}{5}}$$

Y

$$x - x \cdot e^{\frac{k\ t+C_2}{5}} = 20 \cdot e^{\frac{k\ t+C_2}{5}}$$

$$x\left(1 - e^{\frac{k\ t+C_2}{5}}\right) = 20 \cdot e^{\frac{k\ t+C_2}{5}}$$

$$x(t) = \frac{20 \cdot e^{\frac{k\ t+C_2}{5}}}{1 - e^{\frac{k\ t+C_2}{5}}}$$

Ordenando como idea tendremos que integrando entre $t = 0, x = 30$ y $t = 20, x = 30 - 10 = 20$

$$\int_{x=30}^{x=20} \frac{1}{x} dx - \int_{x=30}^{x=20} \frac{dx}{x + 20} = \frac{k}{5} \int_{0}^{2} dt$$

Se llega a que

$$\ln(20) - \ln(30) - \left[\ln(20 + 20) - \ln(30 + 20)\right] = \frac{k(2 - 0)}{5}$$

$$\ln(20) - \ln(30) - \left[\ln(40) - \ln(50)\right] = \frac{k(2 - 0)}{5}$$

$$\ln(20) - \ln(30) - \ln(40) + \ln(50) = \frac{k(2 - 0)}{5}$$

$$\ln\left(\frac{20 \cdot 50}{30 \cdot 40}\right) = \frac{2k}{5}$$

Entonces

$$\frac{2k}{5} = \ln\left(\frac{5}{6}\right) \Rightarrow \boxed{k = \frac{5}{2}\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$$

Integrando entre $t = 0,\ x = 30$ y $t = 5,\ x = x$

$$\int_{x=30}^{x} \frac{1}{x}dx - \int_{x=30}^{x} \frac{dx}{x+20} = \frac{k}{5}\int_{0}^{5} dt$$

$$\ln(x) - \ln(30) - \left[\ln(x+20) - \ln(30)\right] = \frac{5k}{5}$$

$$\ln(x) - \ln(x+20) = k$$

$$\ln\left(\frac{x}{x+20}\right) = k$$

Entonces

$$\ln\left(\frac{x}{x+20}\right) = \frac{5}{2}\ln\left(\frac{5}{6}\right)$$

Desarrollando

$$\ln\left(\frac{x}{x+20}\right) = \ln\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{5}{2}}$$

Exponenciando

$$\frac{x}{x+20} = \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{5}{2}}}_{k} \Rightarrow \frac{x}{x+20} = k$$

Luego

$$x = k(x+20)$$

$$x = kx + 20k$$

$$x - kx = 20k$$

$$x(1-k) = 20k$$ entonces $$x(5) = \frac{20k}{1-k} = \frac{20\left(\frac{5}{2}\ln\left(\frac{5}{6}\right)\right)}{1-\frac{5}{2}\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$$

$$x = \frac{20k}{1-k}$$

Un estanque de 100 decilitros esta lleno con salmuera que contiene 60 kilos de sal disuelta. Entra agua en el estanque a una velocidad de 2 decilitros por minuto y la mezcla, conservada uniforme mediante agitación continua, sale a la misma velocidad. ¿Cuanta sal queda en el tanque luego de una hora?
Sea x(t) la cantidad de kilos de sal en el tanque luego de t minutos; entonces la concentración será $\frac{x}{100}\left[\frac{kilos}{Dl}\right]$

Durante el intervalo dt entran en el tanque $2dt$ Decilitros de agua y salen $2dt$ decilitros de mezcla que contienen $\frac{2x}{100}dt = \frac{x}{50}dt$ kilos de sal.

Asi el cambio dx en la cantidad de sal en el estanque esta dado por

$$dx = \frac{-x}{50}dt$$

Dado que es una expresión de variables separables se tendrá que

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{-1}{50}\int dt$$

Es decir

$$\ln(x) = \frac{-1}{50}t + \ln(C)$$

Por ende

$$x(t) = Ce^{\frac{-t}{50}}$$

Para $t = 0$ la cantidad de sal inicial es 60, luego

$$60 = Ce^{\cancel{\frac{-t}{50}}}$$

lo cual implica que $C = 60$

y para una hora, $t = 60[\min]$

$$x(60) = 60 \cdot e^{\frac{-60}{50}} = 60 \cdot e^{\frac{-6}{5}}$$

Es decir 18,071 kilos

Se ha comprobado que hay una concentración de $0,2\%$ de CO_2 en una galería subterránea de $150 \cdot 50 \cdot 12$ decímetros, $90.000\left[dm^3\right]$, por lo que se trata de renovar esa atmosfera con aire del exterior, el cual tiene una concentración de $0,05\%$ de CO_2, mediante ventiladores a una velocidad de 9000 $\left[\frac{dm^3}{\min}\right]$. Hállese el % de CO_2 luego de 20 minutos.

Sea x(t) en numero de dm^3 de CO_2 en la galería en el tiempo t. La concentración en ese momento será

$$dx = 9000\left(0,05\% - \frac{x}{90000}\right)dt$$

Es decir

$$dx = \left(\frac{9000 \cdot 0,05}{100} - \frac{9000 \cdot x}{90000}\right)dt$$

Simplificando

$$dx = \left(4,5 - \frac{x}{10}\right)dt$$

O bien

$$dx = \frac{45 - x}{10}dt \to -dx = \frac{x - 45}{10}dt$$

Separando variables, se tendrá que

$$\int \frac{dx}{x - 45} = -\frac{1}{10}\int dt$$

Multiplicando por 10 se llegara a que

$$10\int \frac{dx}{45 - x} = -\int dt$$

Por ende

$$10\ln\left(x - 45\right) = -t + \ln\left(C\right)$$

O, lo que es más conveniente

$$10\ln(x-45) = -t + 10\ln(C)$$

Entonces, ordenando el proceso

$$10\ln(x-45) - 10\ln(C) = -t$$

$$\ln\left(\frac{x-45}{C}\right) = -\frac{t}{10}$$

Exponenciando

$$e^{\ln\left(\frac{x-45}{C}\right)} = e^{-\frac{t}{10}}$$

Es decir

$$\frac{x-45}{C} = e^{-\frac{t}{10}}$$

Entontes

$$x = 45 + Ce^{-\frac{t}{10}}$$

Para $t = 0,\ x = 0,2\% \cdot 90000 = 180$, luego

$$180 = 45 + Ce^{\cancel{-\frac{t}{10}}}$$

Entonces $C = 135$

Por ende la ecuación correcta es

$$x = 45 + 135e^{-\frac{t}{10}}$$

Evaluando en t=20 minutos

$$x(20) = 45 + 135e^{-\frac{20}{10}} = 45 + 135e^{-2} = 63,27$$

Entonces el porcentaje de CO_2 en $t = 20$ será

$$\% = \frac{63,27}{90000} = 0,07\%$$

Problemas propuestos en la próxima guía