Funciones Homogéneas

Una función: $f_{(x,y)}$ se llama: FUNCION HOMOGENEA DE GRADO: n si:

$$f_{(\lambda x,\lambda y)} = \lambda^n f_{(x,y)}$$

Ejemplo: Se verifica que las funciones son homogéneas de grado n:

$f(x,y) = x^2 y - y^3$	Funciones de dos variables, para verificar que es función homogénea, se realizan los cambios de variables.
$f(\lambda x,\lambda y) = (\lambda x)^2 (\lambda y) - (\lambda y)^3$ $= \lambda^2 x^2 \lambda y - \lambda^3 y^3$ $= \lambda^3 (x^2 y - y^3)$ $= \lambda^3 f_{(x,y)} \Rightarrow n = 3$	Calculando en: $f(\lambda x,\lambda y)$ Simplificando y ordenando, se cumple la definición de función homogénea, para n=3

En la practica, para reconocer a una función homogénea, es suficiente con calcular el grado absoluto de todos sus términos, si son iguales, entonces la función es homogénea (grado absoluto es la suma de los grados de los factores de un termino)

- La ecuación diferencial; $m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0$; se llama **ecuación homogénea**, si $m(x,y)$; $n(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado.

Ejemplo: se analiza si las siguientes ecuaciones diferenciales son ecuaciones homogéneas:

$(x^3 - y^3)dx + (x^3 + xy^2)dy = 0$	Ecuaciones homogéneas de grado 3
$\left(sen\frac{x}{y} - 5\right)dx + \left(e^{x/y}\right)dy = 0$	Ecuaciones diferenciales homogéneas de grado: 0
$(x^5 + y^5)dx + (xy^3 - y^4)dy = 0$	No es homogénea (si bien: m, n son funciones homogéneas, no son del mismo grado)
$(x^2 + y^4)dx + (x^4 + y^2)dy = 0$	No es homogénea, ni: m, ni: n son funciones homogéneas

Si la ecuación diferencial: $m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0$ Es homogénea; la sustitución: $y = v\,x$; permite convertirla en una ecuación de variables separadas de la forma:

$$P(x,v)dx + Q(x,y)dv = 0$$

Partiendo de la ecuación diferencial:

Funciones Homogéneas

$m_{(x,y)}dx + n_{(x,y)}dy = 0$ Si es ecuación diferencial homogénea, de grado n

$x^n\left[m_{1(y/x)}dx + n_{1(y/x)}dy\right] = 0$ factorizando: x^n , de toda la ecuación, por ser homogénea, permite la expresión en la forma indicada.

$m_{1(y/x)}dx + n_{1(y/x)}dy = 0$

Si: $y = vx \Rightarrow dy = x\,dv + v\,dx$ Efectuando el cambio de variable v=y/x, calculando y remplazando: dy

$m_{1(v)}dx + n_{1(v)}(x\,dv + v\,dx) = 0$ Ordenando, queda una ecuación que permite separar las variables: x,y

$\dfrac{n_{1(v)}}{m_{1(v)} + vn_{1(v)}}dv = -\dfrac{dx}{x}$ Ecuación de variables Separables

De esa manera queda demostrado que toda ecuación homogénea, con el cambio de variable indicado se convierte en una Ecuación de variables Separables. Por tanto resoluble por ese método de acuerdo a sus reglas antes indicadas.

Una vez que una ecuación homogénea, queda convertida en una ecuación de variables Separables, será posible resolver precisamente por ese método de variables separables.

Ejemplo: Se resuelve una ecuación diferencial homogénea

$(x^2 + y^2)dx - xy\,dy = 0$ Ecuación diferencial homogénea. (Se puede demostrar por su definición)

Si: $y = vx \Rightarrow dy = x\,dv + v\,dx$

$\left[x^2 + (vx)^2\right]dx - x(vx)(x\,dv + v\,dx) = 0$ Efectuando la sustitución: $y = vx$

$x^2dx + v^2x^2dx - x^3v\,dv - x^2v^2dx = 0$ Calculando además su diferencial.

$v\,dv = \dfrac{1}{x}dx$ Reemplazando en lugar de: y; desarrollando y simplificando, la ecuación permite ahora separar las variables.

$\int v\,dv = \int \dfrac{1}{x}dx$ Ecuaciones con variables separadas.

$\dfrac{v^2}{2} = Ln\ x + c$ Integrando por reglas conocidas la ecuación con variables ya separadas

$v=\sqrt{2\,Ln\ x+2c}$ Luego despejando: v

$v=\sqrt{2Ln\ x+c_1}$ Tomando: $C_1=2C$; para así simplificar la constante que se encuentra en el radical

$\frac{y}{x}=\sqrt{2Ln\ x+c_1}$ Reemplazando: v = y/x (retornando a las variables originales)

$y=\underline{\underline{x\sqrt{2Ln\ x+c_1}}}$ Despejando: y queda resuelta la ecuación

3. Ejercicios

Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales Homogéneas.

a) $(x+2y)dx+(2x+y)dy=0$

b) $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$

c) $xdy-ydx=x\tan\left(\frac{y}{x}\right)dx$

Soluciones:

a) $y^2+4xy+x^2=c$

b) $\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=cx$

c) $y=xArcsen(cx)$

Funciones No Homogéneas

Si la Ecuación Diferencial de Primer orden: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$; posee la característica de que las funciones M, N son lineales (grado 1),pero que no son homogéneas, se expresaran del siguiente modo:

$$(a_1 x + b_1 y + c_1)dx + (a_2 x + b_2 y + c_2)dy = 0$$

Para la resolución de este tipo de Ecuaciones, se deben considerar los siguientes casos:

Su determinante es igual a cero

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

En este caso, para resolver la Ecuación Diferencial será suficiente realizar el cambio de variable:

$$t = a_1 x + b_1 y$$

Ejemplo:

$(x + 2y - 5)dx + (2x + 4y - 1)dy = 0$	Ecuación Diferencial donde M, N son lineales pero no Homogéneas.
$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$	Verificando la relación que caracteriza al primer caso.
$t = x + 2y \Rightarrow dt = dx + 2dy$	Aplicando cambio de variable.
$[(x + 2y) - 5]dx + [2(x + 2y) - 1]dy = 0$	Reemplazando la nueva variable.
$(t - 5)dx + (2t - 1)\left(\dfrac{dt - dx}{2}\right) = 0$	La Ecuación será de variables Separables.
$(2t - 1)dt = 9dx$	Ecuación de variables ya separadas.
$\int (2t - 1)dt = \int 9dx$	Integrando.
$t^2 - t = 9x + c$	La ecuación resultante, se lleva a términos
$(x + 2y)^2 - (x + 2y) = 9x + c$	de las variables originales.
$x^2 + 4xy + 4yu^2 - 10x - 2y = c$	Ordenando.

Si su determinante es diferente de cero.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$$

En este caso, para resolver la Ecuación Diferencial será necesario resolver un Sistema de Ecuaciones y efectuar Cambios de Variable.

$$\begin{matrix} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = h \\ y = k \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \textit{Cambio de Variable} \\ x = r + h \\ y = s + k \end{matrix}$$

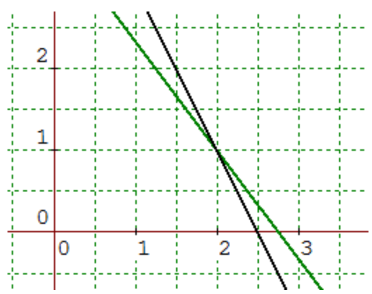
De esta manera se consigue que la Ecuación Diferencial se convierta en una Ecuación Homogénea resoluble por métodos conocidos.

Ejemplo:

$(4x + 3y - 11)dx + (2x + y - 5)dy = 0$ Verificando la condición del caso.

$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \neq 0$ Determinante diferente de cero.

$\begin{matrix} 4x + 3y - 11 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2 = h \\ y = 1 = k \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = r + 2 \\ y = s + 1 \end{matrix}$ Resolviendo el sistema de ecuación.



$$[4(r + 2) + 3(s + 1) - 11]dr + [2(r + 2) + (s + 1) - 5]ds = 0$$

$(4r + 3s)dr + (2r + s)ds = 0$ Realizando el cambio de variable.

Si: $s = vr \Rightarrow ds = rdv + vdr$ Resolviendo la ecuación Homogénea.

$[4r + 3(vr)]dr + [2r + vr](rdv + vdr) = 0$ La ecuación es de variables separables

$$\frac{v + 2}{v^2 5v + 4} dv = -\frac{1}{r} dr$$

$\int \frac{v + 2}{v^2 5v + 4} dv = -\int \frac{1}{r} dr$ Se integran ambos términos.

$$\int\left(\frac{1/3}{v+1}+\frac{2/3}{v+4}\right)dv=\int-\frac{1}{r}dr$$ Utilizando método de fracciones parciales

$$\frac{1}{3}\ln(v+1)+\frac{2}{3}\ln(v+4)=-\ln r+c$$ Considerando C = $\ln c_1$

$$\ln(v+1)^{1/3}+\ln(v+4)^{2/3}=-\ln r+\ln c_1$$ Aplicando propiedades de logaritmos.

$$\ln(v+1)^{1/3}(v+4)^{2/3}=\ln\frac{c_1}{r}$$

$$(v+1)^{1/3}(v+4)^{2/3}=\frac{c_1}{r}$$ Retornando a las variables previas s = vr

$$\left(\frac{s}{r}+1\right)^{1/3}\left(\frac{s}{r}+4\right)^{2/3}=\frac{c_1}{r}$$ Considerando los otros cambios de materiales.

$$\left(\frac{y-1}{x-2}+1\right)^{1/3}\left(\frac{y-1}{x-2}+4\right)^{2/3}=\frac{c_1}{x-2}$$ Ecuación Resuelta.

3. Ejercicios

Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales Homogéneas.

a) $(3x+y-15)dx+(6x+2y-5)dy=0$

b) $(x-2y+4)dx+(2x-4y-6)dy=0$

c) $(x+2y+1)dx-(2x+4y+3)dy=0$

Soluciones:

a) $5x-2(3x+y)+5\ln(3x+y)=c$

b) $4x-2(x-2y)-7\ln(2x-4y+1)=c$

c) $\ln(4x+8y+5)+8y-4x=c$