Homogéneas y Reducibles a Homogéneas

1. a) Resolver: $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} - 1$

b) Determinar para que valores de "r" tiene soluciones de la forma $y = e^{rx}$, la ecuación $y''' - 3y'' + 2y' = 0$

Solución

a) Hacemos el cambio: $y = ux \Rightarrow y' = u + xu'$

Reemplazando en la ecuación: $u + xu' = u^2 + u - 1$

$$\Rightarrow xu' = u^2 - 1 \Rightarrow \frac{du}{u^2-1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2}1n\frac{u-1}{n+1} = 1nx + c_1$$

$$\Rightarrow 1n\frac{u-1}{u+1} = 2\ 1nx + c_2 \Rightarrow 1n\frac{u-1}{u+1} = 1nx^2 + 1nc = 1n\ cx^2$$

$$\Rightarrow \frac{u-1}{u+1} = cx^2$$

Pero $u = \frac{y}{x}$, en (1): $\frac{y-x}{y+x} = cx^2 \Rightarrow y - x = cx^2(x+y)$

b) Para que $y = e^{rx}$ sea la solución es necesario y suficiente que ella y sus derivadas satisfagan la ecuación diferencial dada.

Así: $y = e^{rx} \Rightarrow y' = re^{rx} \Rightarrow y'' = r^2e^{rx} \Rightarrow y''' = r^3e^{rx}$

Reemplazando: $r^3e^{rx} - 3r^2e^{rx} + 2re^{rx} = 0 \Rightarrow r^3 - 3r^2 + 2r = 0$

$$\Rightarrow r(r^2 - 3r + 2) = 0 \Rightarrow r(r-1)(r-2) = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 = 2$$

Luego los valores de r son: 0, 1 y 2

2. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $xdx - \sqrt{1-x^4} \qquad dy = x^2\sqrt{1-x^4}dy$

b) $xdy = y(1 \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})dx$

Solución

a) $xdx = x^2\sqrt{1-x^4}dy + \sqrt{1-x^4}dy = (x^2+1)\sqrt{1-x^4}dy$

$$\Rightarrow \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{1-x^4}}dx = dy \Rightarrow -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} = y + c$$

b) Tenemos: $y' = \frac{y}{x}(1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})...(1)$ (Homogénea)

Hacemos $y = ux \Rightarrow y' = u + xu'$

En (1): $u + xu' = u(1 + \frac{ux}{\sqrt{u^2x^2 + x^2}}) = u(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2+1}})$

$$\Rightarrow xu' = \frac{u^2}{\sqrt{u^2+1}} \Rightarrow \frac{\sqrt{u^2+1}}{u^2}du = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{1+u^2}}{u} + \ln\left|\sqrt{1+u^2} + u\right| = \ln x + c \qquad (2)$$

Pero $u = \frac{y}{x}$.$En(2): -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} + \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} + \frac{y}{x}\right| = \ln x + c$

3. Resolver la ecuación diferencial:

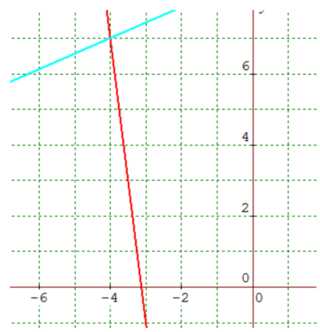
$$(8x + y + 25)dx + (7x - 16y + 140)dy = 0 \qquad (1)$$

<u>Solución</u>

(1) puede escribirse como: $\frac{dy}{dx} = -\frac{8x+y+25}{7x-16y+140}$ ecuación reducible a homogénea). Vemos que:

8(-16) $\neq$ 1(7)

Encontramos la solución del sistema: $\begin{array}{l} 8x + y + 25 = 0 \\ 7x - 16y + 140 = 0 \end{array}$



que es x = -4, y = 7

Hacemos el cambio de variables: $\begin{array}{l} u = x + 4 \Rightarrow du = dx \\ v = y - 7 \Rightarrow dv = dy \end{array}$

En la ecuación, reemplazamos:

$$\frac{dv}{du} = -\frac{8u - 32 + v + 7 + 25}{7u - 28 - 16v - 112 + 140} = -\frac{8u+v}{7u-16v} \qquad (2)$$

La cual es homogénea. Hacemos cambio:

$$z = \frac{v}{u} \Rightarrow v = zu \Rightarrow \frac{dv}{du} = z + u\frac{dz}{du}$$

En (2): $z + u\frac{dz}{du} = -\frac{8u + zu}{7u - 16zu} = -\frac{8+z}{7-16z} \Rightarrow u\frac{dz}{du} = -\frac{8+z}{7-16z} - z$

$$\Rightarrow u\frac{dz}{du} = -\left(\frac{8 + 8z - 16z^2}{7-16z}\right) \Rightarrow u\frac{dz}{du} = \frac{16z^2 - 8z - 8}{7-16z}$$

$$\Rightarrow \frac{7-16z}{16z^2 - 8z - 8}dz = \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{1}{8} - \frac{7-16z}{(2z+1)(z-1)}dz = \frac{du}{u}$$

Por fracciones parciales: $\frac{1}{8}\left[-\frac{10}{2z+1} - \frac{3}{z-1}\right]dz = \frac{du}{u}$

Rojas Huachin Miryan kaoru_200282@hotmail.com

Integrando: $-\frac{10}{16}\ln(2z+1)-\frac{3}{8}\ln(z-1)=\ln(u)+c_1$

$$\Rightarrow -5\ln(2z+1)-3\ \ln(z-1)=8\ \ln(u)+c_2=1n(u^8)+1n(c)=1ncu^8$$

$$\Rightarrow -1n(2z+1)^5(z-1)^3=1n(cu)^8 \Rightarrow (2z+1)^5(z-1)^3=\left[cu^8\right]^{-1} \quad (3)$$

Pero $z=\frac{v}{u}=\frac{y-7}{x+4}$. En (3): $\left(\frac{2y+x-10}{x+4}\right)^5\left(\frac{y-x-11}{x+4}\right)^3=\left[c(x+4)^8\right]^{-1}$

4. Hallar la solución general de las ecuaciones diferenciales:

a) $ax^2+2bxy+cy^2+y'\left(bx^2+2cxy+fy^2\right)=0$

b) $2x+2y-1+y'\left(x+y-2\right)=0$

Solución:

a) tenemos que: $y'=-\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{bx^2+2cxy+fy^2}$

Sea $y=ux\Rightarrow y'=u+xu'$

En (1): $u+xu'=-\frac{ax^2+2bx^2u+cx^2u^2}{bx^2+2cx^2u+fx^2u^2}=-\frac{a+2bu+cu^2}{b+2cu+fu^2}$

$$\Rightarrow xu'=-\frac{a+2bu+cu^2}{b+2cu+fu^2}-u=-\frac{a+2bu+cu^2+bu+2cu^2+fu^3}{b+2cu+fu^2}$$

$$\Rightarrow xu'=-\frac{fu^3+3cu^2+3bu+e}{fu^2+2cu+b}\Rightarrow \frac{fu^2+2cu+b}{fu^3+3cu^2+3bu+a}du=-\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}1n(fu^3+3cu^2+3bu+a)=-1nx+c_1$$

$$\Rightarrow 1n(fu^3+3cu^2+3bu+a)=-31nx+c_2$$

$$\Rightarrow 1n(fu^3+3cu^2+3bu+a)+1nx^3=c_2=1nc$$

$$\Rightarrow (fu^3+3cu^2+3bu+a)x^3=c \quad (2)$$

Pero $u=\frac{y}{x}$, en (2): $fy^3+3cxy^2+3bx^2y+ax^3=c$

b) Vemos que: $y'=\frac{2x+2y-1}{x+y-2}$ (1)

Como 2(a) = 1(2), entonces hacemos el cambio $u=x+y\Rightarrow u'=1+y'$

En (1): $u'-1=\frac{2u-1}{u-2}\Rightarrow u'=-\frac{2u-1}{u-2}+1\Rightarrow u'=\frac{-2u+1+u-2}{u-2}$

$$\Rightarrow u' = -\frac{u+1}{u-2} \Rightarrow \frac{u-2}{u+1}du = -dx \Rightarrow u - 31n(u+1) = -x + c..(2)$$

Pero $u = x + y$, en (2): $x + y - 3\ 1n\left(x + y + 1\right) = \frac{1}{3}(2x + y - c)$

5. Resolver la E.D. $\left(2x^3 + 3y^2x - 7x\right)dx - \left(3x^2y + 2y^3 - 8y\right)dy = 0$

<u>Solución</u>:

Tenemos que: $x\left(2x^2 + 3y^2 - 7\right)dx - y\left(3x^2 + 2y^2 - 8\right)dy = 0$ (1)

Hacemos el cambio: $x^2 = z \Rightarrow 2xdx = dz \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dz$

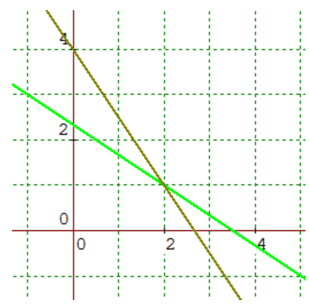
$$y^2 = u \Rightarrow 2ydy = du \Rightarrow ydy = \frac{1}{2}du$$

En (1): $\left(2z + 3u - 7\right)\cdot\frac{1}{2}dz - \left(3z + 2u - 8\right)\cdot\frac{1}{2}du = 0$

$$\Rightarrow \frac{du}{dz} = \frac{2z+3u-7}{3z+2u-8} \qquad (2)$$

Como 2(2) ≠ 3(3), entonces hacemos el cambio. $z = v + h$, $u = r + k$, donde $\left(h,k\right)$ es la solución del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2z+3u-7=0 \\ 3z+2u-8=0 \end{array}\right\} \Rightarrow h=2, k=1$$



Luego $z = v + 2 \Rightarrow dz = dv$; $u = r + 1 \Rightarrow du = dr$

En (2): $\frac{dr}{dv} = \frac{2v+4+3r+3-7}{3v+6+2r+2-8} = \frac{2v+3r}{3v+2r}$ …. (3) (Homogéneo)

Sea $r = tv \Rightarrow \frac{dr}{dv} = t + v\frac{dt}{dv}$

En (3): $t + v\frac{dt}{dv} = \frac{2v+3tv}{3v+2tv} = \frac{2+3t}{3+2t} \Rightarrow v\frac{dt}{dv} = \frac{2+3t}{3+2t} - t$

$$\Rightarrow v\frac{dt}{dv} = \frac{2+3t-3t-2t^2}{3+2t} \Rightarrow v\frac{dt}{dv} = \frac{2-2t^2}{3+2t}$$

$$\Rightarrow \frac{3+2t}{2-2t^2}dt = \frac{dv}{v} \Rightarrow -\frac{5}{4}1n(1-t) + \frac{1}{4}1n(1+t) = 1nv + c_1$$

$$\Rightarrow -5\ 1n(1-t) + 1n(1+t) = 41nv + c_2 \Rightarrow 1n\frac{1+t}{(1-t)^5} = 1nv^4 + 1n\ c$$

$$\Rightarrow 1n\frac{1+t}{(1+t)^5} = 1n\ cv^4 \Rightarrow \frac{1+t}{(1-t)^5} = cv^4 \qquad (4)$$

Pero $t = rv = \frac{u-1}{z-2} = \frac{y^2-1}{x^2-2}, v = z-2 = z^2-2$

En (4): $\frac{1+\frac{y^2-1}{x^2-2}}{(1-\frac{y^2-1}{x^2-2})^5} = c(x^2-2)^4 \Rightarrow \frac{(x^2+y^2-3)(x^2-2)^4}{(x^2-y^2-1)^5} = c(x^2-2)^4$

$\Rightarrow \frac{x^2+y^2-3}{(x^2-y^2-1)^5} = c$

6. Resolver las E.D.:

a) $\left(y^2 - 1n(x)\right) dx + xy^3\, dy = 0$

b) $\left(\tan(x) - \cot g(y) + 3\right) \sec^2(x)dx - \left(3 \tan(x) + \cot an(y) + 1\right) \cos ec^2(y)dy = 0$

Solución:

a) Tenemos que: $\left(y^2 - 1n(x)\right) + xy^3.y' = 0 \Rightarrow xy^3y' + y^2 = 1n(x)$

$\Rightarrow xy2(yy') + y^2 = 1nx$ (1)

Hacemos $u = y^2 \Rightarrow u' = 2yy' \Rightarrow yy' = \frac{1}{2}u'$

En (1): $xu.\frac{u'}{2} + u = 1nx \Rightarrow \frac{1}{2}xu.\frac{du}{dx} + u = 1nx$ (2)

Hacemos $x = e^V \Rightarrow dx = e^V.dv.Ademas: 1nx = v$

En (2): $\frac{1}{2}e^V.u.\frac{du}{e^V.dv} + u = v \Rightarrow \frac{1}{2}u.\frac{du}{dv} + u = v$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{du}{dv} = \frac{v-u}{u} \Rightarrow \frac{du}{dv} = 2.\frac{v-u}{u}$ ......(3) (Homogénea)

Sea $u = tv \Rightarrow \frac{du}{dv} = t + v\frac{dt}{dv}$

En (3): $t + v\frac{dt}{dv} = 2\frac{v-tv}{tv} = 2.\frac{1-t}{t} \Rightarrow v\frac{dt}{dv} = 2\frac{1-t}{t} - t$

$\Rightarrow v.\frac{dt}{dv} = \frac{2-2t-t^2}{t} \Rightarrow \frac{t}{t^2+2t-2}dt = -\frac{dv}{v}$

$\Rightarrow \left[\frac{\sqrt{3}-1}{(2\sqrt{3})(t+1-\sqrt{3})}dt + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}(t+1+\sqrt{3})}dt\right] = -\frac{dv}{v}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}1n(t+1-\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}1n(t+1+\sqrt{3}) = -1nv + c_1$

$\Rightarrow 1n\left[(t+1-\sqrt{3})^{\sqrt{3}-1}.(t+1+\sqrt{3})^{\sqrt{3}+1}\right] = -2\sqrt{3}1nv + c_2$

$\Rightarrow 1n\left[(t+1-\sqrt{3})^{\sqrt{3}-1}.(t+1+\sqrt{3})^{\sqrt{3}+1}\right] = 1nv^{-2\sqrt{3}} + 1nc = 1ncv^{-2\sqrt{3}}$

$\Rightarrow (t+1-\sqrt{3})^{\sqrt{3}-1}.(t+1+\sqrt{3})^{\sqrt{3}+1} = cv^{-2\sqrt{3}}$ (4)

Pero $t = \frac{u}{v} = \frac{y^2}{1nx}; v = 1nx$

En (4): $(\frac{y^2}{1nx} + 1 - \sqrt{3})^{\sqrt{3}-1}(\frac{y^2}{1nx} + 1 + \sqrt{3})^{\sqrt{3}+1})c(1nx)^{-2\sqrt{3}}$

b) Tenemos: $(tgx - \cot gy + 3)\sec^2 x - (3tgx + \cot gy + 1 = \cos ec^2 y.y' = 0......(1)$

Sea $u = \cot gy \Rightarrow u' = -\cos ec^2 y.y'$

En (1): $(tgx - u + 3)\sec^2 x + (3tgx + u + 1)u' = 0$ (2)

Ahora sea: $v = tgx \Rightarrow dv = sc^2 xdx$

En (2): $(v - u + 3)dv + (3v + u + 1)du = 0 \Rightarrow \frac{du}{dv} = -\frac{v-u+3}{3v+u+1}..........(3)$

Como: 1(1) ≠ 3(-1), hacemos:

$$\begin{cases} v - u + 3 = 0 \\ 3v + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow v = -1, \quad u = 2$$

Hacemos el cambio: v = t – 1, u = z + 2 $\Rightarrow$ dv = dt, dz = du

En (3): $\frac{dz}{dt} = -\frac{t-1-z-2+3}{3t-3+z+2+1} = -\frac{t-z}{3t+z}$ (4)

Ahora sea $z = rt \Rightarrow \frac{dz}{dt} = r + t\frac{dr}{dt}$

En (4) : $r + t\frac{dr}{dt} = -\frac{t-rt}{3t+rt} \Rightarrow r + t\frac{dr}{dt} = -\frac{1-r}{3+r} \Rightarrow$

$\Rightarrow t\frac{dr}{dt} = -\frac{1-r}{3+r} - r = -\frac{1-r+3r+r^2}{3+r} \Rightarrow t\frac{dr}{dt} = -\frac{r^2+2r+1}{r+3}$

$\Rightarrow \frac{r+3}{(r+1)^2}dr = -\frac{dt}{t} \Rightarrow 1n(r+1) - \frac{2}{r+1} = -1nt + c \Rightarrow$

$\Rightarrow 1nt(r+1) - \frac{2}{r+1} = c$ (5)

Pero $t = \frac{z}{r} = \frac{u-2}{v+1} = \frac{\cot gy - 2}{tgx+1}, r = tgx + 1$

En (5): $1n\left[(\frac{\cot gy-2}{tgx+1})(tgx+2)\right]-\frac{2}{tgx+2}=c$

Ecuaciones Lineales y Reducibles a Lineales

7. Resolver: $(x^4 1n(x) - 2xy)\,dx + 3x^2y^2dy = 0$

Solución

La ecuación puede escribirse como:

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{x^4 1nx-2xy^3}{3x^2y^2}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2 1nx}{3}y^{-2}+\frac{2}{3x}y$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}-\frac{2}{3x}y=-\frac{x^2 1nx}{3}y^{-2}\quad\text{(Bernoulli)}\qquad(1)$$

Multiplicamos (1) por y^2: $y^2\frac{dy}{dx}-\frac{2}{3x}y^3=-\frac{x^2}{3}1nx$ (2)

Hacemos: $u=y^3\Rightarrow u'=3y'y^2\Rightarrow y^2.y'=\frac{1}{3}u'$

En (2): $\frac{1}{3}u'-\frac{2}{3x}u=-\frac{x^2}{3}1nx\Rightarrow u'-\frac{2}{x}u=-x^2 1nx$ (3)

Sea F.I. $=e^{\int -\frac{2}{x}dx}=e^{-21nx}=e^{1nx^{-2}}=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$ (4)

Ahora: (3)x(4): $\frac{d}{dx}\left[u.\frac{1}{x^2}\right]=-1x\Rightarrow u.\frac{1}{x^2}=-\int 1nx+c$

$$\to u.\frac{1}{x^2}=-\left[x\ 1nx-x\right]+c\Rightarrow u=-x^3 1nx+x^3+cx^2$$

Pero $u = y^3$. Quede: $y^3 = -x^3 1nx + x^3 + cx^2$

8. Resolver: $yy' = \text{ctg } x\,(\text{sen } x-y^2)$

Solución

$yy' = \cos x - (\cot gx)y^2 \Rightarrow y' + (\cot gx)y = (\cos x)y^{-1}$ (Bernoulli)

$\Rightarrow yy' + (ctgx)y^2 = \cos x$. Sea $u = y^2 \Rightarrow u' = 2yy' \Rightarrow yy' = \frac{1}{2}u'$

$\Rightarrow \frac{1}{2}u' + (\cot gx)\,u = \cos x \Rightarrow u' + (2\cot gx)u = 2\cos x$ (E.D.L.) (1)

F.I. $= e^{\int 2ctgxdx}=e^{2\int\frac{\cos x}{senx}dx}=e^{21n(senx)}=e^{1n(senx)^2}=(senx)^2$

(1) x.F.P.: $\left[u(senx)^2\right]'=2\cos x(sen^2x)\Rightarrow u(sen^2x)=$

$$=2\int sen^2x\cos xdx+c$$

Rojas Huachin Miryan kaoru_200282@hotmail.com

9. Resolver: 2senxy' + y cosx = y^3 (x cosx-senx)

Solución

Tenemos: $y' + \frac{\cos x}{2\ \text{senx}} . y = \frac{x \cos x - \text{senx}}{2\ \text{senx}} . y^3$

$\Rightarrow y' + \frac{1}{2} ctgx . y = (\frac{1}{2} x \operatorname{cotgx} - \frac{1}{2}) y^3$ (Bernoulli) (1)

Multiplicamos por y^{-3}, nos queda:

$y^{-3}.y' + \frac{1}{2} ctgx . y^{-2} = \frac{1}{2} x\ \text{ctgx} - \frac{1}{2}$ (2)

Cambio: $u = y^{-2} \Rightarrow u' = -2y^{-3}.y' \Rightarrow y^{-3}y' = -\frac{1}{2}u'$

En (2): $-\frac{1}{2}u' + \frac{1}{2} ctgx . u = \frac{1}{2} x\ \text{cotgs} - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow u' - cgx.u = 1 - x\ \text{cotgx}\ \text{(lineal)}$ (3)

$$F.I. = e^{-\int ctgxdx} = ^{-1(senx)} = e^{1n(senx)} = e^{1n(senx)^{-1}} = (senx)^{-1} = \frac{1}{senx}$$

Ahora (3) x F.I.: $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{senx}.u\right] = \frac{1}{senx} - x\frac{ctgx}{senx}$

$\Rightarrow \frac{1}{senx}.u = \int \cos ecxdx - \int x \frac{\cos x}{sen^2 x} dx$

$\Rightarrow \frac{1}{senx}.u = \frac{x}{senx} + c \Rightarrow i = x + c\ \text{senx}$

Pero $u = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$, nos queda: $\frac{1}{y^2} = x + c$ senx

10. Resolver

$\sec^2 ydy - tg^3 ydx = -x\ tg\ ydx$

Solución

$\sec^2 y \frac{dy}{dx} - tg^3 y = xtgy$ (1)

Sea u = tgy $\Rightarrow$ u' = $\sec^2 y.y'$ (2)

(2) en (1): $u' - u^3 = xu \Rightarrow u' + xu = u^3$ (Bernoulli)

$\Rightarrow u^{-3}u' + xu^{-2} = 1$. De (3).

Sea $z = u^{-2} \Rightarrow z' = -2u^{-3}u' \Rightarrow -\frac{1}{2} z' = u^{-3} u'$

En (3): $-\frac{1}{2}z' + xz = 1 \Rightarrow z' - 2xz = -2$ (E.D.L.) (4)

$F.I.: e^{\int -2xdx} = e^{-x^2} .Ahora\ (4)\ \text{x F.I.:} \left[ze^{-x^2}\right] = -2e^{-x^2}$

$\Rightarrow ze^{-x^2} = -2\int e^{-x^2}dx + c \Rightarrow z = -2e^{x^2}\int e^{-x^2}dx + ce^{x^e}$ (5)

Pero z = u^{-2} $\wedge$ u = tgy $\Rightarrow$ z = $(tgy)^{-2}$ $= \dfrac{1}{tg^2 y} = ctg^2 y$ (6)

(6) en (5): $ctg^{2y)ce^{x^2}} \;-2e^{x^2}\int e^{-x^2}dx$

11. Resolver: $x\dfrac{dy}{dx} - y - y\ 1n\left(\dfrac{y}{x}\right) = x^3 y(1n(y/x))^2$

Solución:

Tenemos: xy'-y-y 1n(y/x) x^3y $1n^2$(y/x)

Dividendo entre xy, tenemos:

$$\frac{xy'-y}{xy} - \frac{1}{x}1n\left(\frac{y}{x}\right) = x^2 1n^2(y/x) \qquad (1)$$

Sea u = 1n (y/x) $\Rightarrow u' = \dfrac{(xy'-y)/x^2}{y/x} = \dfrac{xy'-y}{xy}$

En (1): $u' - \dfrac{1}{x}u = x^2u^2$ (Bernoulli) (2)

Multiplicando por u^{-2}, queda: $u^{-2}.u' - \dfrac{1}{x}u^{-1} = x^2$ (3)

Hacemos cambio: $z = u-1 \Rightarrow z' = -u^{-2}.u' \Rightarrow u-2.u' = -z'$

En (3): $-z' - \dfrac{1}{x}z = x^2 \Rightarrow z' + \dfrac{1}{x}z = -x^2$ (Lineal) (4)

F.I. = $e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{1nx} = x$

(4) x F.I.: $\dfrac{d}{dx}[z.x] = x^3 \Rightarrow zx = -\dfrac{x^4}{4} + c \Rightarrow z = -\dfrac{x^3}{4} + \dfrac{c}{x}$

ro z = u^{-1} = $\dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{1n(y/x)}$, nos queda: $11n(y/x) = -\dfrac{x^3}{4} + \dfrac{x}{c}$

Exactas y Reducibles a Exactas

12. La Ecuación diferencial:

$$(2y + 3x^2y^3)dx + (3x + 5x^3y^2)dy = 0$$

Puede ser resuelta utilizando un factor integrante de la forma x^m y^n. determinar este factor y resolver la ecuación diferencial propuesta.

Solución

Si u = $x^m y^n$ es un F.I., entonces:

$(2y+3x^2y^3)\ x^m y^n dx + (3x+5x^3y^2)x^m y^n dy = 0$ es exacta. (1)

$$\Rightarrow M^* = 2x^n y^{n+1} + 3x^{m+2}y^{n+3} \Rightarrow \frac{\partial M^*}{\partial y} = 2(n+1)x^m y^n + 3(n+3)x^{m+2}y^{n+2}$$

$$N^* = 3x^{m+1}y^n + 5x^{m+3}y^{n+2} \Rightarrow \frac{\partial N^*}{\partial Z} = 3(m+1)x^m y^n + 5(m+3)x^{m+2}y^{n+2}$$

= 3(m+1)$x^m y^n$ + 5(m+3)$x^{m+2}y^{n+2}$

$$\Rightarrow [2(n+1)-3(m+1)]x^m y^n + [3(n+3)-5(m+3)]x^{m+2}y^{n+2} = 0$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2(n+1)-3(m+1)=0 \Rightarrow 2n-3m=1 \\ 3(n+3)-5(m+3)=0 \Rightarrow 3n-5m=6 \end{array}\right\} \Rightarrow m=-9, n=-13$$

Luego el factor es: u = x^{-9} y^{-13}

En (1): ($2x^{-9}y^{-12}+3x^{-7}y^{-10}$)dx + ($3x^{-8}y^{-13}+5x^{-6}y^{-11}$)dy = 0

$\Rightarrow$ M* = n$x^{-9}y^{-12}+3x^{-7}y^{-10}$ $\wedge$ N* = $3x^{-8}y^{-13}$ + $5x^{-6}y^{-11}$

Sea F(x,y) = c la solución. Entonces: $\frac{\partial F}{\partial X} = M^* \Lambda \frac{\partial F}{\partial Y} = N^*$

De: $\frac{\partial F}{\partial X}$ =$2x^{-9}y^{-12}+3x^{-7}y^{-10}$ $\Rightarrow$ F(x,y) = $\int 2x^{-9}y^{-12}dx +$

$$+\int 3x^{-7}y^{-10}dx + h(y)$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \frac{2x^{-8}}{-8}y^{-12} + \frac{3x^{-6}}{-6}y^{-10} + h(y) = -\frac{1}{4}x^{-8}y^{-12} -$$

$$-\frac{1}{2}x^{-6}y^{-110} + h(y) \ldots.(\alpha)$$

Ahora: $\frac{\partial F}{\partial Y}$ =N* $\Rightarrow$ $-\frac{1}{4}$ (-12)$x^{-8}y^{-13}$ - $\frac{1}{2}$ (-10)$x^{-6}y^{-11}$ + h'(y)=N*

$$\Rightarrow 3x^{-8}y^{-13}5x^{-6}y^{-11} + h'(y) = 3x^{-8}y^{-13} + 5x^{-6}y^{-11} \Rightarrow h'(y) = 0$$

$$\Rightarrow h(y) = k$$

En (α): F(x,y) = - $\frac{1}{4}$ $x^{-8}y^{-12}$ - $\frac{1}{2}$ $x^{-6}y^{-10}$ + k = c

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}x^{-8}y^{-12} - \frac{1}{2}x^{-6}y^{-10} = c$$

13. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial:

a) $(y+xy^2)dx + (x-x^2y)dy = 0$

b) $(3y^2-x)dx+(2y^3-6xy)dy= 0$ utilizando un factor integrante de la forma $\vartheta(x+y^2)$

Solución

a) Aplicamos factor integrante: $\frac{\partial M}{\partial Y}=1+2xy,\ \frac{\partial N}{\partial X}=1-2xy$

Luego: $\frac{u'(z)}{u(z)}=\frac{\frac{\partial M}{\partial Y}-\frac{\partial N}{\partial X}}{N\frac{\partial Z}{\partial X}-M\frac{\partial Z}{\partial Y}}=\frac{4xy}{(x-x^2y)\frac{\partial Z}{\partial X}-(y+xy^2)\frac{\partial Z}{\partial Y}}$ ....(1)

Sea z = xy $\Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial X}=y, \quad \Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial Y}=x$

En (1): $\frac{u'(z)}{u(z)}==\frac{4xy}{(x-x^2y)y-(y+xy^2)x}=\frac{4xy}{-2x^2y^2}=-\frac{2}{xy}=-\frac{e}{z}$

$$\Rightarrow \frac{u'(z)}{u(z)}=-\frac{2}{z}\Rightarrow \ln u(z)=-2\ln z\Rightarrow u(z)=z^{-2}$$

$$\Rightarrow u(x,y)=\frac{1}{z^2}=\frac{1}{(xy)^2}... \quad (2)$$

Multiplicando la ecuación original por el factor integrante; nos queda:

$\frac{y+xy^2}{x^2y^2}dx+\frac{x-x^2y}{x^2y^2}dy=0$ la cual es exacta.

Sea F(x,y)=c la solución, entonces se verifica que:

$$\frac{\partial F}{\partial X}=\frac{y+xy^2}{x^2y^2}\Lambda\frac{\partial F}{\partial Y}=\frac{x-x^2y}{x^2y^2}$$

De $\frac{\partial F}{\partial X}=\frac{1}{x^2y}+\frac{1}{x}\Rightarrow F(x,y)=\frac{1}{y}\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{1}{x}dx+h(y)$

$$\rightarrow F(x,y)=-\frac{1}{xy}+1nx+h(y)... \quad (3)$$

Ahora de (3): $\frac{\partial F}{\partial Y}=\frac{1}{xy^2}+h'(y)=\frac{x-x^2y}{x^2x^2}\Rightarrow\frac{1}{xy^2}+h'(y)=$

$$=\frac{1}{xy^2}-\frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow h'(y)=-\frac{1}{y}\Rightarrow h(y)=-\ln y.... \quad (4)$$

(4) en (3): $F(x,y)=-\frac{1}{xy}+1nx-1ny=c\Rightarrow-\frac{1}{xy}+1n\frac{x}{y}=c$

b) Tenemos que $\frac{\partial N}{\partial Y} = 6y, \frac{\partial N}{\partial X} = -6y$

Sabemos que: $\frac{u'(z)}{u(z)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial Y} - \frac{\partial N}{\partial X}}{N\frac{\partial Z}{\partial X} - M\frac{\partial Z}{\partial Y}} = \frac{12y}{(2y^3 - 6xy)\frac{\partial Z}{\partial X} - (3y^2 - x)\frac{\partial Z}{\partial Y}}$

Por dato: $z = x + y^2 \Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial X} = 1, \frac{\partial Z}{\partial Y} = 2y$

En (1): $\frac{u'(z)}{u(z)} = \frac{12y}{(2y^3 - 6xy).1 - (3y^2 - x).2y} = \frac{12y}{-4y^3 - 4xy} = -\frac{3}{y^3 + x}$

Luego: $\frac{u'(z)}{u(z)} = -\frac{3}{z} \Rightarrow 1nu(Z) = -31nz = 1nz^{-3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow u(z) = z^{-3} = \frac{1}{z^3}$$

Es decir: $u(x, y) = \frac{1}{(x + y^2)^3}$

Multiplicando la ecuación original por el factor integrante, tenemos:

$\frac{3y^2 - x}{(x + y^2)^3}dx + \frac{2y^3 - 6xy}{(x + y^2)^3}dy = 0$ la cual es exacta.

Sea F(x, = c la solución, entonces se verifica que

$\frac{\partial F}{\partial X} = \frac{3y^2 - x}{(x + y^2)^3}$ y $\frac{\partial F}{\partial Y} = \frac{2y^3 - 6xy}{(x + y^2)^3}$

De $\frac{\partial F}{\partial X} = \frac{3y^2 - x}{(x + y^2)^3} = \frac{3y^2}{(x + y^2)^3} - \frac{x}{(x + y^2)^3}$

$$\Rightarrow F(x, y) = 3y^2 \int \frac{1}{(x + y^2)^3}dx - \int \frac{x}{(x + y^2)^3}dx = -\frac{3}{2}y^2(x + y^2)^{-2} +$$

$$+ \frac{1}{x + y^2} - \frac{1}{2}y^2(x + y^2)^{-2} + h(y)$$

$$\Rightarrow F(x, y) = \frac{1}{x + y^2} - \frac{2y^2}{(x + y^2)^2} + h(y)... \quad (2)$$

De (2): $\frac{\partial F}{\partial Y} = -\frac{2y}{(x + y^2)^2} - \frac{2[2y(x + y^2)^2.2(x + y^2).2y]}{(x + y^2)^4} + h'(y) =$

$$= \frac{2y^3 - 6xy}{(x+y^2)^3}$$

$$\Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = 0... \qquad (3)$$

(3) en (2): $F(x,y) = \frac{1}{x+y^2} - \frac{2y^2}{(x+yy^2)^2} = c$

14. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial:

$(x^2y + y^3 - xy)\,dx + x^2dy = 0$ Sabiendo que $u = x^{-3} f(y/x)$ es un factor integrante.

Solución

Multiplicando por el factor integrante:

$\left[\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^3 - \frac{y}{x^2}\right] f(y/x)dx + \frac{1}{x} f(y/x)dy = 0...$(1) tenemos que es exacta.

En esta nueva ecuación, podemos considerar a $u_1 = f(y/x)$ como un nuevo factor integrante, es decir tenemos que:

$\left[\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^3 - \frac{y}{x^2}\right] dx + \frac{1}{x} dy = 0.....$ (2) con $u_1 = f(y/x)$ es exacta. Como el nuevo factor integrante es $u_1 = f(y/x)$, tenemos que se cumple

$\frac{u'}{u} = \frac{\frac{\partial M}{\partial Y} - \frac{\partial N}{\partial X}}{N\frac{\partial Z}{\partial X} - M\frac{\partial Z}{\partial Y}}$ donde $u = u(z)$…

(3)

Sea $z = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{x^2}, \frac{Yz}{3y} = \frac{1}{x}$

Además $M = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^3 - \frac{y}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial Y} = \frac{1}{x} + \frac{3y^2}{x^3} - \frac{1}{x^2}$

$$N = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$$

Reemplazando en (3): $\frac{u'}{u} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{3y^2}{x^3}}{\frac{1}{x}(-\frac{y}{x^2}) - \left[\frac{y}{x} + (\frac{y}{x})^3 - \frac{y}{x^2}\right].\frac{1}{x}} =$

$$= -\frac{1 + 3(y/x)^2}{\frac{y}{x} + (\frac{y}{x})^3}$$

Pero $z = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{u'(z)}{u(z)} = -\frac{1+3z^2}{z+z^3} \Rightarrow 1nu(z) = -1n(z+z^3)$

$$\Rightarrow u(z)=\frac{1}{z+z^3}\Rightarrow u(y/x)=\frac{1}{\frac{y}{x}+(\frac{y}{x})^3}... \qquad (4)$$

Ahora (2) x (4): $\left[\frac{y}{x}+(\frac{y}{x})^3-\frac{y}{x^2}\right]\left[\frac{1}{\frac{y}{x}+(\frac{y}{x})^3}\right]dx+\frac{1}{x}\left[\frac{1}{\frac{y}{x}+(\frac{y}{x})^3}\right]dy=0$ (5)

Sea $M=1-\frac{1/x}{1+(y/x)^2}, N=\frac{1}{y+y^3/x^2}$

Se debe cumplir que F(x,y)=c es la solución, donde

$M=\frac{\partial F}{\partial X} \wedge N=\frac{\partial Z}{\partial Y}$

Trabajando con:

$$M=\frac{\partial F}{\partial X}\to\frac{\partial F}{\partial X}=1-\frac{1/x}{1+(y/x)^2}\to F\int\left[1-\frac{1/x}{1+(y/x)^2}\right]dx+g(y)$$

$$\to F=\int dx-\int\frac{1/x}{1+(y/x)^2}dx+g(y)=x-\int\frac{x}{x^2+y^2}dx+g(y)$$

$$\to F=(x,y)=x-\frac{1}{2}(x^2+y^2)+g(y)...(\alpha)$$

Ahora usando: $N=\frac{\partial F}{\partial Y}...(6)$

De (α): $\frac{\partial F}{\partial Y}=-\frac{1}{2}.\frac{2y}{x^2+y^2}+g'(y)=-\frac{y}{x^2+y^2}+g'$

En (6): $\frac{1}{y+y^3/x^2}=-\frac{y}{x^2+y^2}+g'(y)$

$$\Rightarrow g'(y)=\frac{x^2}{y(x^2+y^2)}+\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2}{y(x^2+y^2)}=\frac{1}{2}\Rightarrow g(y)=1ny...(7)$$

(7) en (α): F(x,y) = x - $\frac{1}{2}$ 1n(x^2+y^2) + 1ny

La solución es: F(x,y)=c, es decir: x-$\frac{1}{2}$ 1n(x^2+y^2)+1ny=c

15. **(x^2y^2 +1)dx + 2x^2dy = 0**

<u>Solución</u>:

Vemos que: N = x^2y^2 + 1 $\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial Y}=2x^2y,\ \ N=2x^2\Rightarrow\frac{\partial N}{\partial X}=4x$ (no es exacta).

Haremos la fórmula y calcularemos un factor integrante:

$$\frac{u'(z)}{u(z)}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial Z}{\partial X}-m\frac{\partial Z}{\partial Y}}=\frac{2x^2y-4x}{2x^2\frac{\partial z}{\partial x}-(x^2y^2+1)\frac{\partial z}{\partial y}}... \qquad (1)$$

Sea $z=xy\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x$

En (1): $\frac{u'(z)}{u(z)}=\frac{2x^2y-4x}{2x^2y-(x^2y^2+1)x}=\frac{2xy-4}{2xy-x^2y^2-1}=\frac{2xy-4}{5xy-x^2y^2-1}=\frac{2z-4}{2z-z^2-1}$

$$\Rightarrow\frac{u'(z)}{u(z)}=-\frac{2(z-2)}{z^2-2z+1}=\frac{2(z-1-1)}{(z-1)^2}=-\frac{2(z-1)}{(z-1)^2}+\frac{2}{(z-1)^2}$$

$$\Rightarrow 1nu(z)=-21n(z-1)-\frac{2}{z-1}\Rightarrow 1nu(z)=1n(z-1)^{-2}.-\frac{2}{z-1}$$

$$\Rightarrow u(z)=e^{1n(z-1)^{-2}}-\frac{2}{z-1}=e^{1n(z-1)^{-2}}.e^{-\frac{2}{z-1}}=(z-1)^{-2}.e^{-\frac{2}{z-1}}$$

Luego: $u(x,y)=(xy-1)^{-2}e^{-(2/xy-1)}$ es el factor integrante buscado. Multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante, se convierte en exacta:

$(x^2y^2+1)(xy-1)^{-2}e^{-2(xy-1)-1}\,dx+2x^2(xy-1)^{-2}e^{-2(xy-1)-1}dy=0….$ (2)

Se F(x,y,=c l solución general de (2), entonces se cumple que:

$\frac{\partial F}{\partial X}=M_1.....(3)$ $\qquad \frac{\partial F}{\partial Y}=N_1....(4)$

De (4): $\frac{\partial F}{\partial y}=2x^2(xy-1)^{-2(xy-1)^{-1}}\Rightarrow$

$$\Rightarrow F=\int 2x^2(xy-1)^{-2}e^{-2(xy-1)^{-1}}.dy+h(x)=xe^{-2(xy-1)^{-1}}+h(x)....(5)$$

De (4): $\frac{\partial Z}{\partial X}=e^{-2(xy-1)^{-1}}+xe^{-2(xy-1)^{-1}}\left[2(xy-1)^{-2}.y\right]+h'(x)$

Remplazando en (3):

$$e^{-(xy-1)^{-1}}+2xy(xy-1)^{-2}e^{-2(xy-1)^{-1}}+h'(x)=(x^2y^2+1)(xy-1)^{-2}e^{-(2/xy-1)}$$

$$\Rightarrow e^{-2(xy-1)^{-1}}+\frac{2xy}{(xy-1)^2}e^{-2(xy-1}+h'(x)=\frac{x^2y^2+1}{(xy-1)^2}e^{-2(xy-1)^{-1}}$$

$$\Rightarrow h'(x)=\frac{x^2y^2-2xy+1}{(xy-1)^2}e^{-2(xy-1)^{-1}}-e^{-2(xy-1)^{-1}}$$

$$\Rightarrow h'(x) = \frac{(xy-1)^2}{(xy-1)^2} e^{-2(xy-1)^{-1}} - e^{-2(xy-1)^{-1}} = 0 \Rightarrow h(x) = 0$$

Reemplazando en (5), la solución general es:

$$xe^{-2(xy-1)^{-1}} = c$$

16. Demostrar que si M(x,y)dx + N(x,y)dy=0 es una ecuación diferencial no exacta y que:

$$a = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial Y}}{xM - yN}$$

donde R depende sólo de xy (léase x por y), entonces u(xy) es un factor integrante de dicha ecuación. Encontrar una fórmula general para dicho factor y aplicando éste, resolver la ecuación:

$$(3x + \frac{6}{y})dx + (\frac{x^2}{y} + \frac{3y}{x})dy = 0$$

Solución

La fórmula del factor integrante es: $\frac{u'(z)}{u(z)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial Y} - \frac{\partial N}{\partial X}}{N\frac{\partial Z}{\partial X} - M\frac{\partial Z}{\partial Y}}$ ...(1)

Sea $z = xy \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = y, \frac{\partial z}{\partial y} = x$

En (1) $\frac{u'(z)}{u(z)} = \frac{\frac{\partial N}{\partial Y} - \frac{\partial N}{\partial X}}{Ny - Mx} = \frac{\frac{\partial N}{\partial X} - \frac{\partial M}{\partial Y}}{xM - yN} R....$

Como R = R(xy) = R(z), en (2): $\frac{u'(z)}{u(z)} = R(z) \Rightarrow 1nu(z) = \int R(z)dz$

$\Rightarrow u(z) = e^{\int R(z)dz}$ ...(3) factor integrante buscado.

Resolviendo la ecuación diferencial dada:

$$M = 3x + \frac{6}{y} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial Y} = -6y^{-2}, \qquad n = \frac{x^2}{y} + \frac{3y}{x} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2x}{y} - \frac{3y}{x^2}$$

En (2). $R = \frac{2\frac{x}{y} - \frac{3y}{x^2} + \frac{6}{y^2}}{3x^2 + \frac{6x}{y} - x^2 - \frac{3y^2}{x}} = \frac{2x^3y - 3y^3 + 6x^2}{xy(2x^3y + 6x^2 - 3y^3)} = \frac{1}{xy} - \frac{1}{2}$...(4)

Luego el factor integrante es u(x,y) = xy

A continuación multiplicamos la ecuación diferencial por el factor integrante, se convierte en exacta}: $(3x^2y+6x)dx+(x^3+3y^2)dy = 0$, donde $M_1 = 3x^2y + 6x$, $N_1 = x^3 + 3y^2$

Ahora sea F(x,y) = c la solución general, donde:

$\frac{\partial F}{\partial x} = M_1$....(5) y $\frac{\partial F}{\partial y} = N_1$....(6)

Rojas Huachin Miryan kaoru_200282@hotmail.com

De (5): $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 y + 6x \Rightarrow F(x, y = \int (3x^2 y + 6x)dx + g(y)$

$\Rightarrow F(x, y) = x^3 y + 3x^2 + h(y)........(7)$

De (7): $\frac{\partial F}{\partial y} = x^3 + h'(y).En(6) : x^3 + h'(y) = x^3 + 3y^2$

$$\Rightarrow h'(y) = 3y^2 \Rightarrow h(y) = y^3$$

En (7): F(x,y)=$x^3y + 3x^2 + y^3$
La solución general es: $x^3y + 3x^2 + y^3 = c$

Bibliografía

- Ecuaciones Diferenciales 1
  Cesar Saal R. (1998)
  Felix Carrillo C.(1998)

Rojas Huachin Miryan
kaoru_200282@hotmail.com

Fac. Ingeniería Industrial- UNMSM